

# 基于核心素养的高中数学教科书编写探索

## ——以函数概念为例

人民教育出版社中学数学室 张唯一

**摘要：**形成和发展学生的数学核心素养是数学课程的核心目标。本文通过探讨数学核心素养和核心素养的关系，以及数学核心素养与过去数学素养的异同，得出数学课程要用数学学科特点育人。在此基础上，以函数概念为例，分析教科书编写中如何通过创设情境帮助学生建立完整函数概念，发展“数学抽象”核心素养。只有发挥好数学的内在力量，才能使学生的核心素养得到发展。

**关键词：**核心素养，数学核心素养，函数概念，数学抽象

### 一、核心素养和数学核心素养

《中国学生发展核心素养》（2016年5月30日征求意见稿）指出，“学生发展核心素养，主要是指学生应具备的，能够适应终身发展和社会发展所需要的必备品格和关键能力。”中国学生发展核心素养的总体框架，“以‘全面发展的人’为核心，分为文化素养、自我发展、社会参与三个方面，综合表现为人文底蕴、科学精神，学会学习、健康生活，责任担当、实践创新六大素养。”征求意见稿还对6大素养的内涵和主要表现作了界定。根据《教育部关于全面深化课程改革、落实立德树人根本任务的意见》，核心素养体系是研究学业质量标准、修订课程方案和课程标准的依据，用于统领课程改革的相关环节。

《普通高中数学课程标准(修订稿)》（2016年5月征求意见稿，以下简称《课程标准》）指出，“数学核心素养是具有数学基本特征的、适应个人终身发展和社会发展需要的人的关键能力与思维品质。”数学核心素养包括：数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算和数据分析。从数学核心素养的内涵和具体6条素养来看，更多体现的是对数学能力和数学思维品质的要求，具有很强的数学学科特点。

《课程标准》没有揭示数学教育与学生发展核心素养的内在联系，也没有明确数学教育在学生发展核心素养中的独特价值。根据《中国学生发展核心素养》对6大素养的内涵和主要表现的描述来看，数学学科的贡献应该主要在科学精神、实践创新方面，尤其是科学精神中的理性精神。按现代的研究，数学事实上不应被归属于一般意义上的“经验科学”，而是更加接近于所谓的“思维的科学”。数学学科在育人上的价值具有不可替代性，尤其是在培养人的思维品质上的作用。

《面向未来：21世纪核心素养教育的全球经验》研究了29个国际组织或经济体的核心素养，在归纳得出的18个素养中，数学素养是单独作为一条核心素养提出，属于6个基础领域素养之一。这在一定程度上说明了数学素养对人的发展和社会发展的重要性。虽然《中国学生发展核心素养》没有专门提数学素养，但数学学科仍应回归数学教育的本质，即要用数学的特点育人，而不是去数学化。

## 二、从数学素养到数学核心素养

数学核心素养在我国是最近提出的概念，但数学素养的提法在中学数学教育中却早就存在。教学大纲或课程标准是教科书编写的主要依据，在以往的教学大纲或课程标准中，很多就是把数学素养的培养作为数学课程的目标，只是对数学素养缺乏明确的内涵界定和系统阐述。

2000年的《九年义务教育全日制初级中学数学教学大纲（试用修订版）》已经有了数学素养的提法，“使学生受到必要的数学教育，具有一定的数学素养”。由其“教学目的”阐述来看，此处的数学素养应该包括：

**基础知识、基本技能、运算能力、思维能力、空间观念、解决简单的实际问题、创新意识、良好的个性品质、辩证唯物主义的观点等。**

2002年的《全日制普通高级中学数学教学大纲》提到“使学生在高中阶段继续受到数学教育，提高数学素养”。由其“教学目的”阐述来看，此处的数学素养应该包括：

**基础知识、基本技能，以及其中的数学思想方法，提出问题、分析问题和解决问题的能力，创新意识和应用意识，数学探究能力、数学建模能力和数学交流能力，数学实践能力，思维能力（包括：空间想象、直觉猜想、归纳抽象、符号表示、运算求解、演绎证明、体系构建等诸多方面），情感态度等。**

2001年的《全日制义务教育数学课程标准（实验稿）》没有明确地提数学素养，但要求发展学生的

**数感、符号感、空间观念、统计观念、应用意识、推理能力。**

2003年的《普通高中数学课程标准（实验）》课程总目标中提到了“进一步提高作为未来公民所必要的数学素养”。从“具体目标”来看，此处数学素养应该包括：

**基础知识和基本技能、数学思想和方法，空间想象、抽象概括、推理论证、运算求解、数据处理，提出、分析和解决问题，数学表达和交流，获取数学知识，应用意识和创新意识，科学态度，理性精神等。**

2011年的《义务教育数学课程标准(2011年版)》在实验稿的基础上,提出的10个“核心词”:

**数感、符号意识、空间观念、几何直观、数据分析观念、运算能力、推理能力、模型思想,以及应用意识和创新意识。**

史宁中教授指出,“用现在的话语体系,就是明确提出并界定了十个核心素养。这十个关键词是数学基本思想(抽象、推理、模型)在义务教育阶段的具体体现”。

2016年的《普通高中数学课程标准(修订稿)》明确数学核心素养是具有数学基本特征的、适应个人终身发展和社会发展需要的人的关键能力与思维品质。数学核心素养包括:

**数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算和数据分析。**

比较过去的数学素养和现在的数学核心素养可以发现,《课程标准》中的6条核心素养在以往的大纲或课程标准中都能找到类似的概念。这些概念的名称可能不完全一致,但其反映的本质并无实质性差异,可见在概念上6条数学核心素养对中学数学教育来说并不是全新的东西。数学素养的提法包括知识、能力、情感态度三个维度,数学核心素养则不包括知识和情感态度,这体现了6条素养在数学素养中的“核心”地位。但是,这似乎和核心素养应是知识、能力、情感态度的综合有所出入。即使如此,数学核心素养的提法还是可以给我们一些启示:

(一) 随着社会和数学的发展,数学素养也在发展。例如,在2000年以前的教学大纲中,很少提及统计素养的要求。随着统计应用的日益广泛和人们对它认识的不断深入,统计在中学数学中的地位逐渐上升,统计观念或数据分析观念也逐渐成为数学素养的要求,目前已成为数学核心素养之一。又如,过去数学教育非常重视学生逻辑推理能力的培养,那时的逻辑推理主要指演绎推理。由于现代社会对创新型人才的重视,需要培养有创新思维的人,被认为是“发明的工具”的归纳推理开始受到重视。目前数学核心素养中的逻辑推理不仅指演绎推理,还包括归纳推理。

(二) 数学核心素养的提出,是数学教育要回归本质的强调。核心素养应该是知识、能力和情感态度的综合。数学核心素养没有包括知识和技能,“数学素养基于数学知识和技能,又高于具体的数学知识和技能”,“数学(核心)素养反映了数学本质与数学思想”<sup>[8]</sup>。以前的数学教育重视基本知识和基本技能的培养,但对数学思想方法的要求一直是存在的。只是在现实的数学教学中,由于各种各样的原因,异化为“讲解例题+模仿练习”的机械训练,使得数学教学没有了思想方法的灵魂。数学核心素养对主要数学思想的强调,其实就是在强调数学教育要回归本质。

(三) 发展数学核心素养,不仅要重视知识的结果,也要重视知识形成、发展的过程。数学知识也许可以通过记忆和训练获得,“数学的思想不是靠讲解让学生理解的,而是靠创设情境让学生感悟的。”<sup>[4]</sup>因此,以发展学生数学核心素

养为宗旨的教科书，必然要求更好地把握数学的本质，在此基础上创设问题情境，设计数学学习活动，展示数学概念、结论、应用的形成、发展过程。在了解知识的来龙去脉中，让学生感悟到数学的本质和数学思想。

### 三、核心素养在函数概念建立中的发展

“函数及应用”是高中数学内容的四大领域之一。函数概念是中学数学中最重要的概念之一，它是后续很多内容学习的基础，其思想和方法贯穿高中数学课程的始终。由于函数概念的高度抽象性，函数概念也是中学数学中最难把握的概念之一，建立函数概念的过程是典型的数学抽象过程。下面就以函数概念编写为例，探讨教科书在过程设计和内容选择上，如何更好地帮助学生建立完整的函数概念，发展“数学抽象”素养。

《课程标准》对函数概念的要求：“在初中用变量之间的依赖关系描述函数的基础上，用集合与对应关系的语言刻画函数，建立完整的函数概念，体会集合语言和对应关系在刻画函数概念中的作用。了解构成函数的要素，能求简单函数的定义域。”

现行初中数学教科书中大都把函数定义为：在一个变化过程中，如果有两个变量  $x$  与  $y$ ，并且对于  $x$  的每一个确定的值， $y$  都有唯一确定的值与其对应，那么我们就说  $x$  是自变量， $y$  是  $x$  的函数。一般把这种定义方式叫函数的“变量说”。

高中数学教科书则采用集合论的语言来定义函数：设  $A, B$  是非空的数集，如果按照某种确定的对应关系  $f$ ，使对于集合  $A$  中的任意一个数  $x$ ，在集合  $B$  中都有唯一确定的数  $f(x)$  和它对应，那么就说  $f: A \rightarrow B$  为从集合  $A$  到集合  $B$  的一个函数，记作  $y=f(x), x \in A$ 。其中，自变量  $x$  的取值范围  $A$  叫做函数的定义域。一般把这种定义方式叫做函数的“对应说”（或“映射说”）。

数学中任何一个新概念的引入都有其必要性和合理性。必要性和合理性的恰当体现，不仅可以明确后续学习的方向，而且有助于更深刻地领悟概念的本质。函数的概念在初中已有定义，在高中如何让学生体会重新定义的必要性和合理性？比较两种定义的不同，从高中定义区别于初中定义的地方切入，是一种比较自然的做法。初中函数的“变量说”定义形象、直观、自然，通俗易懂，但没有突出函数的本质——对应关系。初中函数中不出现抽象符号  $f(x)$ ，不强调定义域、值域等概念，函数概念不完整。高中函数的“对应说”定义建立在集合论的基础上，更接近现代数学的语言，普适性强，更重要的是它抓住了函数的本质。高中函数中引入了抽象符号  $f(x)$ ，明确了定义域、值域等概念，函数概念相对完整。

教科书的设计可以有两种方式：一是从强调函数的定义域、对应关系等要素出发，在函数要素分析的基础上，抽象出函数的定义；二是集合作为现代数学的语言，用它重新刻画函数的概念，在具体案例分析的基础上，归纳概括出函数的抽象定义。

#### （一）强调函数概念的定义域、对应关系等要素

函数本质上讲是两个非空实数集之间的一种对应关系，定义域、值域、对应

关系构成了函数概念的三要素，任何一个要素的不同都导致函数的不同。初中函数的“变量说”定义对三要素的强调是不够的，因此高中函数的定义可以从强调定义域和对应关系切入。

1. 定义域不同导致函数不同。例如， $y = x^2, x \in (-\infty, \infty)$ 与 $y = x^2, x \in (0, +\infty)$ ，虽然函数的解析式相同，但由于定义域不同，它们表示不同的函数。当然，教科书在呈现时，为避免讨论过于抽象，可以赋予不同定义域的函数以一定的实际背景，如 $y = x^2, x \in (0, +\infty)$ 可以表示正方形的面积等，帮助学生理解和判断它们是不同的函数。

2. 对应关系指的是对应的结果，而不是对应的过程或表示形式。例如， $y = x^2, x \in (-\infty, \infty)$ 与 $u = t^2, t \in (-\infty, +\infty)$ ，虽然解析式中字母不一样，但有相同的定义域和对应关系，因此它们是相同的函数；又如， $y = \cos^2 x + \sin^2 x, x \in (-\infty, \infty)$ 和 $y = 1, x \in (-\infty, \infty)$ ，虽然解析式不同，但有相同的定义域和对应关系（对应的结果是一样的），因此它们是相同的函数。对同一个函数，还可以用表格、图像、文字描述等不同形式来表示它的对应关系。

通过以上讨论，突出了函数概念中定义域与对应关系的本质重要性，为引入更抽象的定义作好了铺垫。通过设置思考栏目，先让学生自己归纳概括，在此基础上，教科书给出函数的抽象定义。

## （二）用集合与对应的语言刻画函数概念

通过选择典型体案例，在具体案例上的概括是化解抽象难点的常用方法。在此之前，学生已经学习了集合的内容，了解了集合是现代数学语言。因此，教科书可以从学生已有“变量说”认知出发，选择若干典型的案例，引导学生用集合与对应的语言分析案例中变量关系的共同特征，再概括出“对应说”。这样既衔接了初中已有的知识经验，又让学生经历从具体到抽象的概括过程。在用集合与对应的语言刻画函数概念的过程中，形成对函数概念本质的切身体会。

案例是归纳概括的基础，要特别注意典型性和丰富性，要能在学生理解函数概念中能起到奠基性的“参照物”作用。现行教科书提供了三个案例：炮弹高度与时间的关系、臭氧层面积与时间的关系、恩格尔系数与时间的关系，分别用解析式、图像、表格三种表示方法。从数量上看，三个案例基本可以构成归纳概括的基础。从案例背景的选择上，臭氧层空洞、恩格尔系数与学生的生活有一定的距离。为了更有利于学生的理解，也为了更好地激发学生的学习兴趣，背景应该选择离学生生活更贴近或更易理解的案例，例如可以用图像表示股票的价格指数与时间关系，用表格表示射击序号与中靶环数的关系等。另外，三个案例都是描述与时间的关系，从丰富案例背景的角度看应该更多样化一些。

案例所涉及的函数类型，要注意三种函数表示法的覆盖，一定要有只能用图像、表格表示的函数例子。表格、图像不仅是表示法的一种，从学生学习的角度看，它们使抽象的函数符号形象化，为学生提供了直观的机会。因此，图像、表

格是帮助学生理解函数概念的重要手段。通过只能用图像、表格表示的函数例子，不仅可以提升学生对函数概念的认识层次，而且可以帮助学生更全面、深刻地领悟函数是刻画“对应关系”的本质，避免只有解析式才是函数的错误认识。

案例是为数学问题的提出服务的，而问题是为了让学生真正参与到函数概念的概括过程中。教科书可以设置问题去引导学生分析具体案例中包含的变量关系，要求用集合表示自变量和函数值的范围，用对应的语言去描述变量间的关系（用公式、图、表等表示）。分析若干案例后，可以设置一个思考栏目，如“分析、归纳以上三个实例，变量之间的关系有什么共同点？”或者“能对上述问题的共性进行再抽象吗？”教科书在学生概括的基础上，给出抽象的函数定义及其符号 $f(x)$ 等。

以上建立函数概念的两种方式各有利弊，第一种从强调函数概念的定义域、对应关系等要素出发，较好体现了引进抽象定义的必要性，但从具体到抽象的概括过程有所欠缺；第二种从用集合与对应的语言刻画函数概念出发，较好体现从具体到抽象的概括过程，但必要性体现得不是很充分。

另外，对函数概念演变历史的了解是建立完整函数概念的重要补充。我们知道函数概念从大概 16—17 世纪形成开始到现在，经过了一系列的演变，主要有以下几个阶段：

#### **$x$ 的幂— $x$ 的代数式— $x$ 的任意解析式—变量说—对应说—关系说**

当然函数概念的演进过程并不是线性的或演绎式的。对函数发展历史的了解，不仅是落实《课程标准》对于数学文化融入数学学习中的要求，更重要的是了解了函数概念的演变历史及其演变原因，有助于理解函数定义之所以成为现在这种形式，从而更全面、更深刻地认识函数概念的本质。在教科书中，这部分内容可以是以阅读栏目的方式呈现；也可以设计活动，让学生自己去收集材料并整理。

#### **参考文献**

1. 林崇德. 21 世纪学生发展核心素养研究[M].北京:北京师范大学出版社,2016.
2. 郑毓信.新数学教育哲学[M].上海:华东师范大学出版社, 2015.
3. 人民教育出版社,课程教科书研究所等. 普通高中课程标准实验教科书数学 1 必修[M].北京:人民教育出版社, 2007.
4. 史宁中.推进基于学科核心素养的教学改革[J].中小学管理, 2016(2): 19-21.
5. 史宁中.数学教育的未来发展[J].数学教学, 2014(1): 1-3.
6. 章建跃.树立课程意识 落实核心素养[J].数学通报, 2016(5): 1-4.
7. 章建跃,陶维林.注重学生思维参与和感悟的函数概念教学[J].数学通报, 2009(6): 19-24.
8. 马云鹏.关于数学核心素养的几个问题[J].课程·教科书·教法, 2015(9):36-39.
9. 中华人民共和国教育部制订.九年义务教育全日制初级中学数学教学大纲(试用修订版)[M].北京:人民教育出版社, 2000.

10. 中华人民共和国教育部制订.《全日制普通高级中学数学教学大纲》[M].北京：人民教育出版社，2002.
11. 中华人民共和国教育部制订.《全日制义务教育数学课程标准(实验稿)》[M].北京：北京师范大学出版社，2001.
12. 中华人民共和国教育部制订.《普通高中数学课程标准（实验）》[M].北京：人民教育出版社，2003.
13. 中华人民共和国教育部制订.《义务教育数学课程标准(2011年版)》[M].北京：北京师范大学出版社，2011.
14. 《普通高中数学课程标准(修订稿)》2016年5月征求意见稿。
15. 《中国学生发展核心素养》2016年5月征求意见稿。