

2015 数学系教育课程修订案之高中数学核心素养

崔承贤* 金亚稟**

I. 引言...

《2015 数学系教育课程修订案》从内容上看，与主张文理科统合的教育课程不同的是，维持之前教育课程的文理科通用数学不变，其他内容没有特别大的新的变化。其变化的特点仅仅是缩减了一部分内容并对考评方针提出了建议，目的在于减轻学习负担和重新调整选修科目的构成。

虽然如此，但 2015 教育课程全新兴起，这是由于总论和各科目强调了培养核心素养的具体事项。2015 教育课程总论所追求的核心素养是学生筛选和利用以现代知识为基础的社会提供的知识和信息，有机地与自己的生活结合起来。这类素养被收入各科目之后迎来了新的局面。例如，在当前社会，学生们在解决自己面临的问题现象时，由于看待事物的切入点不同会引起意见不一甚至产生一些矛盾，这时合理的决策即能起到很大的作用（朴善花，2015）。鉴此，为了培养未来国际市民必备的资质和素养，学校数学教育被要求做到使学生们自觉能动地构建数学知识，通过同伴合作和调解矛盾等过程，最终取得成果。（教育科学技术部，2011；车润京 外，2014；NCTM,2000）。

在这一时代需求下，生活于 21 世纪的学生们所必备的核心素养经过各教科的分头研讨，出台了各科目的复合型素养。尤其是，要应对环境、人权、战争、疾病等复杂的社会现象，作为国际市民需要培养的是实实在在的素养，如人性、决策力、信息处理、思想沟通等，围绕强调可持续发展的教育的议论也纷纷涌现（朴善花，2015）。为了今后可持续发展的社会，我们的教育中要强调的必备能力是能从全球角度去认识社会、经济、环境等领域反复发生的挑战与克服挑战的各种状况和重大课题，培养合

理的多种的观点和价值观。其培养目标不仅是学习的某一个个人，而是要培养能够认识和理解平等共存的社会、人种的多样性、人类和自然之间互惠关系价值的国际市民（金镐硕 外，2011；申东熙 外，2012；柳英义 外，2013；李善京 外，2010 朱美京 外，2015）。从这另一方面来看，素质教育是解决国际社会根本问题的复合型教育的一环，是以加强全球教育课程核心素养为目标的。不仅如此，最近联合国强调全世界要在全球化背景下通过学识的总体途径，提高批判性思维和创新思维能力。为了确立一种能让学生们对未来充满希望的可持续发展的教育框架，并以此发展能培养必备素养的学校教育，故修订了教育课程（朴善花，2015）。

II. 数学课程素养的意义及其含义

1. 核心素养的意义

《2015 教育课程修订案》总论提出 5 个核心素养‘自我管理素养’、‘知识信息处理素养’、‘创新融合思考素养’、‘审美情趣素养’、‘思想沟通素养’、‘共同体素养’（教育部 2015e），又从数学教科的角度特别规定了 6 个数学教科素养，即包括《2009 教育课程修订案》中明确提出的‘问题解决’、‘推理’、‘思想沟通’的三个数学过程，又补充了‘创意·融合’、‘信息处理’、‘态度及实践’三个素养（教育部·韩国教育课程评价院·韩国科学创意财团，2015:37）。2015 数学系教育课程“性质”中提出的有关素养的内容如下：

作为教科素养的‘问题解决’是指在不知道解决办法的情况下，利用数学的知识和技巧，寻求解决策略，选出最合适的解决方案，解决现有问题的能力；‘推理’是指对数学事实进行推测、理论分析、据理证明，且能做出反证的能力；‘创新·融合’是以数学知识和技巧为基础，不断找到全新的有意义的思路并精细化，能将各种数学知识、技巧、经验联系起来或者将其他教科或实际生活中的知识、技巧、经验与数学联系融合起来，最终产生新的知识、技巧、经验来解决问题的能力。‘思想沟通’是

指能把数学知识或思路、数学行为的结果、问题解决过程、信念和态度等用语言、文字、图画、记号表达出来，且能理解他人思路的能力。‘信息处理’是指各种资料和信息搜集、整理、分析、利用，选择并使用合适的工程工具或教具有效处理各类资料和信息的能力。最后，‘态度和实践’是指认识数学的价值，自觉学习数学的态度以及在民主市民意识下进行实践的能力。（教育部，2015a）

另外，2015 数学教育课程“目标”的第 2 项中提出的有关素养的内容如下：

培养理解数学概念、原理、定律，获得技巧，用数学方式进行推理、思想沟通的能力，用数学方式去理解周边生活与社会及地区的现象，合理地有创意地解决问题，培养作为一个学数学学习者所应该具备的态度和实践能力。

1. 通过用数学的方式观察、分析、组织及表达社会及自然现象，理解文字和列式、几何、数和演算、函数、概率和统计等有关概念、原理、定律及他们之间的关系，获取数学的技巧。
2. 用数学的方法进行推理和思想沟通，以创意·融合型思维和信息处理能力为基底，用数学的方式理解社会和自然现象，合理地有创意地解决问题。
3. 对数学充满兴趣和自信，理解数学的作用和价值，作为学习数学之人，培养端正的态度和实践能力。

鉴此，2015 数学系教育课程中，在数学系的‘性质’和‘目标’中明确了数学学科素养的思想；在教育课程开发报告书中揭示了与各讲授·学习方法及注意事项有着密切联系的教科素养；并且明确了今后教科书的编写和授课将朝着延伸学生的教科素养这一方向努力（教育部·韩国教育课程评价院·韩国科学创意财团，2015:38）。

接下来，举例说明一下最终公布的《2015 教育课程修订案》（教育部，2015a）数学领域的‘讲授·学习方法及注意事项’。

高中通用科目‘数学’之函数领域的讲授·学习方法及注意事项

- 进一步扩展中学时期所学习的函数内容，通过现有两个集合之间的对应关系理解函数的概念。
- 能利用工程道具处理函数曲线图。
- 通过具体例子了解一一对应、恒等函数、常数函数、一对一函数、复合函数、反函数的含义。
- 对有理式、无理式只要求简单理解有理式函数、无理式函数的含义即可。
- 通过查找被定义函数对应的例子，认识函数的有用性。（态度及实践）（教育部，2015a）

运用教育课程中提到的讲授·学习方法和注意事项，使学生们理解数学的必要性和有用性，感受学习数学的乐趣，从而对数学产生兴趣和自信（教育部，2015a）。

2. 核心素养的含义

《2015 数学系教育课程修订案》提出 6 个素养的含义和构成素养的子要素的含义，期待学生们通过数学学习获取的能力“技巧”如下：

(1) 解决问题素养

解决问题素养是指，在不知道解决方法的情况下，利用数学知识和技巧，寻求解决策略并从中选择最为合适的解决方案解决现有问题的能力。解决问题素养的子要素‘理解问题和寻求策略’、‘实施计划和反思’、‘合力解决问题’、‘数学建模’、‘创建问题’的含义及体现技巧进行如下说明（朴善花，2015）。

<表 1> 解决问题素养的子要素及其含义和技巧

子要素	意义	技巧
理解问题和寻求策略	掌握问题所要求的东西以及现有的条件和信息，求索合适的解题策略，制定解题计划的能力	(问题)的理解分析、(条件和信息)掌握、(关系)了解、计划、探究、一般化、特殊化、类推、分类、调查、倒算、单纯化、图表形式、制表、成立算式、(多种策略)构思

实施计划和反证	执行所计划的解题过程并验证，经过反证后对解题方法和答案进行评价	计算、(程序)执行、解题、应用、利用、检查、反思、评价
合力解决问题	均衡分担责任并互动，和团队共同解决问题的能力	说明、合理化、提问、批判、(意见)尊重、(意见)调整、决策、讨论、提议、综合
数学建模	将实际生活问题用数学方式表现并分析，导出结论后做出与情况相符合的解释的能力	(情况)模型建立、变化、分析、应用、利用、解释、导出结论、检查
创建问题	变换现有问题的形式或创建新的问题	(条件)转化、寻找类似、类比、找出关联、扩大、生成、(问题)创建

* 出处: 朴京美 外, 2015b, 第 39-40 页

(2) 推理素养

推理素养是指‘对数学事实进行推测、理论分析和证明，并反证整个过程的能力’。推理素养的子素养‘观察与推测’、‘有条理地执行步骤’‘数学事实分析’、‘证明’、‘推理过程的反证’的含义及体现技巧如下。

<表 2> 推理素养的子素养及其含义和技巧

子要素	含义	技巧
观察与推测	在观察和探究时，使用归纳、类推等偶然的推理，对数学事实进行推测的能力	观察、推测、寻找规则、探究、一般化、特殊化、类推
有条理地执行步骤	能够有条理地实行数学步骤和数学事实导出的过程的能力	形式化、制图、理清顺序、代入法、单纯化、计算、按步骤、解题、求(解)、求函数
数学事实分析	分析数学概念、原理、定律的能力	理解、掌握(条件、信息等)、分析、定义、理清关系、比较、区分、测定、(单位、式)的变化、引入公式、(数、个数、概率)的数、估算、分解、合成
据理证明	为了看到数学事实的真实性，提出证据并说明理由的能力	据理证明、寻找反面案例、例证、证明、说明、制定规则
推理过程的反证	能够以批判的眼光评价自己的推理过程是否正确，并能进行倒算	反证、倒算、批判、评价、探讨、判断、判别、确认

* 出处: 朴京美 外, 2015b, 第 40 页

(3) 创新·融合素养

创新·融合能力是指‘以数学的知识和技巧为基础，找到各种具有全新含义的思路并精致化，联系各类数学知识、技巧、经验，或者联系融合了数学和其他教科、实际生活的知识、技巧、经验’，创建新的知识、技巧和经验以解决问题的能力’。创新·融合能力的子要素及其含义以及体现技巧如下。

〈表 3〉 创新·融合素养的子要素及其含义和技巧

子要素	含义	技巧
洞察性	遇到问题，能找到新的思路、解决策略、解决方法，从新的观点提出问题的能力	找出（出自新观点的问题解决方法或策略）、（从新的观点出发）提出问题、发现、创作、想象、发明、制造
流畅性	遇到问题，能找到多个思路、解决办法、答案的能力	找出（多个解决方法或解答）、提出（2 个以上问题解决方案、策略）、计算出（开放型问题的多种解答）
灵活性	能脱离固定的思考方式、从多种观点出发找出解决方案、策略和思路，或者提出问题的能力	找出（多种观点出发的解决方案、策略和思路）、在各种范畴（代数、几何、式、表、图等）找出解决体、（从多个观点出发）提出问题
精致性	能够在原有的数学思路中加入更为具体的东西或进行改变，从而发展为更有价值的东西	（数学思路）具体化、（数学式事实利用表、图、模型、数学用语、记号等）简单明了地表示、（数学思路或解题过程）排列/精致化）、（在各种解题或说明中）找出最完美的一种
数学内部联系	联系各种数学知识、技巧、经验等生成新的数学知识、技巧和经验，解决数学问题的能力	找到（互不相同的主题或互不相同的年级的数学知识、技巧、经验之间的关系 /理清关系/联系起来/统一起来/进行重组、（遇到数学问题）能运用（两个以上的知识、技巧）/解决问题
数学外部联系和融合	能联系并融合数学和其他教科或实际生活的知识、技巧、经验等，产生新的知识、技巧、经验等，解决问题	找出（与实际生活或其他教科有关的数学知识、技巧、经验等）、运用（实际生活或其他教科的数学知识、技巧、经验等）/联系起来/理清关系/进行融合

* 出处: 朴京美 外, 2015b, 第 41 页

(4) 思想沟通素养

思想沟通能力是指‘数学知识或思路、数学活动的结果、问题解决过程、信念和态度等’用语言、文字、图表、记号表达出来，理解他人思路的能力。思想沟通能力的子要素及其含义和表现技巧如下。

〈表 4〉 思想沟通素养的子要素及其含义和技巧

子要素	含义	技巧
理解数学的表现	能理解数学式表现的含义并正确使用	画、读写（数、视觉）、表现、形式化、叙述、制图、理解
数学表现的开发和转化	能制定体现自己思路的表达方式，能转换各类数学表现方式	制（表）、制（图）、修饰、填空、理清名称、（图、式、表等）的体现、表达、选择、变换（转换）
表达自己的想法	能向他人表明数学学习活动的过程和结果	说明、写、说、展示、讨论
理解他人的想法	能理解并评价他人的想法	倾听、质疑、了解、讨论

* 出处：朴京美 外, 2015b, 第 42 页

(5) 信息处理素养

信息处理素养是指‘搜集、处理、分析、运用各种资料和信息，选择并使用合适的工程道具和教具，有效处理资料和信息的能力’。信息处理的子要素及其含义和表现技巧如下。

<表 5> 信息处理素养的子要素及其含义和技巧

子要素	含义	技巧
搜集资料和信息	遇到实际生活和数学问题，能找到并生成合适的资料和信息，进行搜集的能力	搜集、调查、记录、寻求、生成（资料）
整理分析资料和信息	能将搜集的资料和信息根据目的进行分类、整理、分析、评价的能力	表现、分类、整理、列举、排列、比较、捆绑、分析、分类、视觉化、评价
解释运用信息	分析的信息中，能准确了解其内在的含义并进行解释、综合、运用的能力	预测、说明、解释、综合、运用
利用工学道具和教具	探究数学思路和概念、解决问题时，能选择和使用合适的工学道具和教具的能力	选择、制作、使用工程道具、视觉化

* 出处：朴京美 外, 2015b, 第 42 页

(6) 态度和实践素养

态度和实践素养是指，‘认识数学的价值，自觉地学习数学的态度和具有民主市民意识并进行实践的能力’。态度和实践能力的子要素及其含义和技巧如下。

<表 6> 态度和实践素养的子要素及其含义和技巧

子要素	含义	技巧
-----	----	----

认识价值	怀着对数学的关注和兴趣，能认识到数学的实用性、陶冶性、审美性、文化性价值的的能力	(对数学)关注和感兴趣、认识(数学的)价值、理解(数学的)作用、认识(数学的)必要性/有用性、认识(数学的)便利性
自觉的学习态度	保持学习数学的意志和自信，自己设定目标，自觉地学习并评价学习结果的能力	具有(愉快、成就感、动机化、安定感、满足感、挑战意识、积极性、自信心、恒心)、设定目标、制订计划、调节、检查、评价、时间管理、行动自律
市民意识	通过数学活动，行为正直、公正、具有责任心，怀着挑战的勇气克服困难，关怀、尊重他人及齐心合力的态度、有理有据地提出意见、合理决策的态度，付诸于实践	采取(肯定、正直)的态度、具有(责任心、挑战精神、勇气)、关怀、尊重、齐心合力、有理有据地提出意见、说明理由、合理决策

* 出处: 朴京美 外, 2015b, 第 43 页

3. 数学系教育课程中反映的高中数学教科素养的举例说明

数学系教育课程中一如既往地数学系各教育课程的各项项目中反映了数学教科素养。首先，‘性质’中提出了 6 个数学教科素养的含义以及培养数学教科素养的意义。‘目标’中不仅在总目标还在第二和第三个小目标中提出了培养素养的目标(朴善花, 2015)。另外，‘内容体系’的‘技巧’一项中提示了具体的能力，在各内容领域都体现了数学教科素养。在‘完成标准’中，各内容领域的完成标准和‘讲授·学习方法及注意事项’中也提到了数学教科素养的培养及有关内容。完成标准所反映的高中数学教科素养按照各科目整理如下。

(1) 数学

在通用科目—数学的内容体系中所提出的完成标准按照各类素养整理如下：

<表 7> ‘数学’教科的各核心素养完成标准

核心素养	完成标准
问题解决	[10 数学 01-03] 理解其余整理的含义 并以此解决问题。
	[10 数学 01-11] 理解二次函数的最大、最小，并以此解决问题。

推理	[10 数学 03-06] 理解充分条件和必要条件并可以区分。
	[10 数学 03-08] 理解绝对不等式的含义，可以简单证明绝对不等式。
创新·融合	
思想沟通	[10 数学 01-07] 理解二次方程式中判别式的含义并能够说明。
信息处理	
态度·实践	

另一方面，'讲授·学习方法及注意事项'中的数学教科素养的培养及有关内容如下：

<表 8> '数学' 教科的各核心素养 讲授·学习方法及注意事项

核心素养	讲授·学习方法及注意事项
问题 解决	
推理	[[高中数学 数和演算部分] 指导求证时从直观理解开始逐渐变得正式。
创新·融合	[高中数学 文字和算式部分] 能尝试运用方程式和不等式解决实际生活问题，以此来认识数学的必要性和有用性。
	[高中数学 几何部分] 使用直线的方程式和圆的方程式时要与中学时期所学到的内容联系起来。
	[高中 数学 几何部分] 通过学习图形的方程式，理解几何与代数的相关性，提供多种讲授·学习经验。
	[高中 数学 概率和统计部分] 数的排列和数的组合比较简单的情况下，可以用举例的方法，直接罗列或者用树图表等各种方法求解，然后再用一般的方法帮助理解。
思想沟通	[高中 数学 函数部分] 通过具体范例理解加法法则和乘法法则的含义，可解释清楚适用两个法则的不同之处。
信息处理	[高中 数学 几何部分] 运用直线的方程式、圆的方程式以及图形的移动时，会使用工程工具。
	[高中 数学 函数部分] 运用函数图像时会使用工程工具。
态度·实践	[高中 数学 数和演算部分] 可联系数学的各部分内容，以此来认识集合与命题的必要性和有用性。
	[高中 数学 函数部分] 函数的概念是在中学所学的内容上进一步扩展，通过现在两个集合之间的对应关系帮助理解。
	[高中 数学 函数部分] 通过具体例子理解一一对应、恒等函数、常值函数、一对一函数、复合函数、反函数的含义
	[高中 数学 函数部分] 试着找到被定义的函数相对应的例题，由此认识到函数的有用性。
	[高中 数学 概率和统计部分] 尝试解决实际生活问题，可由此认识到数列和组合在各种情况下的必要性及有用性。

通用科目数学中，替代体系难以解决的创新·融合、信息处理、态度和实践等在讲授·学习方法及注意事项的条项中详细地提及。

(2) 数学 I

一般选择科目数学 I 的内容体系中提出的完成标准按各素养整理如下：

<表 9> ‘数学 I’ 教科各核心素养的完成标准

核心素养	完成标准
解决问题	[12 数学 I 01-08] 可使用指数函数和对数函数解决问题。
推理	[12 数学 I 03-08] 可使用数学归纳法求证
创新·融合	[12 数学 I 01-05] 能理解常用对数并使用。
	[12 数学 I 02-03] 理解正弦定理和余弦定理并灵活运用
思想沟通	[12 数学 I 03-04] 知道 Σ 的涵义，理解其性质并灵活运用
	[12 数学 I 01-03] 理解指数定律，并可使用该定律简单列式
信息处理	[12 数学 I 02-02] 知道三角函数的涵义，能画出正弦函数、余弦函数、正切函数的曲线图。
态度·实践	

另一方面，数学 I 的‘讲授·学习方法及注意事项’中有关数学教科素养的培养的内容如下：

<表 10> ‘数学 I’ 教科的各核心素养的讲授·学习方法及注意事项

核心素养	讲授·学习方法及注意事项
解决问题	
推理	
创新·融合	[高中 数学 I 三角函数部分] 使用正弦定理和余弦定理掌握三角形的角的大小和边的长度之间的关系，能用各种方法求出三角形的面积。
思想沟通	
信息处理	[高中 数学 I 指数函数和对数函数部分] 使用指数和对数及指数函数和对数函数时，能利用工程工具。
	[高中 数学 I 三角函数部分] 描绘三角函数的图像或解决与三角函数有关的问题时，会使用工程工具。
态度·实践	[高中 数学 I 指数函数和对数函数部分] 能用指数函数和对数函数表现具体的自然现象或社会现象，解出此过程中出现的简单的方程式和不等式以解决问题，以此认识指数函数和对数函数的有用性和价值。
	[高中 数学 I 三角函数部分] 利用正弦定理和余弦定理，解决各类问题，以此认识三角函数的有用性和价值。
	[高中 数学 I 数列部分] 数学归类法作为自然数 n 相关命题的求证方法，认识其有用性和价值。

数学 I 的替代体系难以解决的各种信息处理或者态度及实践在讲授学习方法及注意事项中详细提出，弥补了上课时基本难以解决的素养问题。

(3) 数学 II

一般选择科目数学 II 的内容体系中提到的完成标准按各素养整理如下：

〈表 11〉‘数学 II’各教科核心素养的完成标准

核心素养	完成标准
解决问题	[12 数学 II 02-10] 能解答方程和不等式的问题。
	[12 数学 II 02-11] 能解答速度和加速度问题。
	[12 数学 II 03-06] 能解答速度和距离问题。
推理	
创新·融合	[12 数学 II 01-04] 能理解连续函数的性质并灵活运用。
思想沟通	[12 数学 II 02-08] 能判断函数的增加和减少、极大化和极小化，并进行说明。
	[12 数学 II 02-09] 能描绘函数图像的抽象图形。
信息处理	
态度·实践	

另一方面，数学 II 的‘讲授·学习方法及注意事项’中有关数学教科素养的培养的内容如下：

〈表 12〉‘数学 II’教科的各核心素养的讲授·学习方法及注意事项

核心素养	讲授·学习方法及注意事项
解决问题	
推理	
创新·融合	[高中 数学 II 积分部分] 不利用级数之和对定积分进行定义。 $f(x)$ 对不定积分 $F(x)$ 来说，是将 $F(b)-F(a)$ 作为 $F(x)$ 在区间 a 到 b 的定积分，可用各种方式导入并进行说明。
思想沟通	[高中 数学 II 积分部分] 不利用级数的和对定积分进行定义。 $f(x)$ 对不定积分 $F(x)$ 来说，是将 $F(b)-F(a)$ 作为 $F(x)$ 在区间 a 到 b 的定积分，可用各种方式导入并进行说明。
信息处理	[高中 数学 II 函数的极限与连续部分] 通过图像直观理解函数的极限的涵义与性质，能在这一过程中使用工程工具
	[高中 数学 II 微分部分] 直观理解微分系数的几何涵义，能在这一过程中使用工程工具。
态度·实践	[高中 数学 II 微分部分] 与微分法则的单纯适用相比，了解微分的涵义并使用，解决各类问题，以此认识微分的有用性和价值。
	[高中 数学 II 积分部分] 与积分法则的单纯适用相比，了解积分的涵义并使用，解决各类问题，以此认识积分的有用性和价值。

数学Ⅱ替代体系中，对解决问题素养进行了重点介绍，内容体系中难以解决的信息处理、态度和实践等在讲授·学习方法及注意事项中具体提到。不过，数学Ⅱ教育课程中没有提到推理素养。

(4) 微积分

一般选择科目微积分的内容体系中提到的完成标准按各素养整理如下：

〈表 13〉‘微积分’各教科核心素养的完成标准

核心素养	完成标准
解决问题	[12 微积 01-06] 能用等比级数解答各类问题。
	[12 微积 02-13] 能解答方程式和不等式问题。
	[12 微积 02-14] 能解答速度和加速度问题。
	[12 微积 03-07] 能解答速度和距离问题。
推理	[12 微积 01-01] 知道数列的收敛与发散并能判别。
	[12 微积 01-04] 知道级数的收敛与发散并能判别。
创新·融合	[12 微积 03-01] 能理解置换积分法并灵活运用。
	[12 微积 03-02] 能理解部分积分法并灵活运用。
思想沟通	[12 微积 02-12] 能描绘函数图像的抽象图形
信息处理	
态度·实践	

另一方面，微积分的‘讲授·学习方法及注意事项’中有关数学教科素养的培养的内容如下：

〈表 14〉‘微积分’教科的各核心素养的讲授·学习方法及注意事项

核心素养	讲授·学习方法及注意事项
解决问题	
推理	
创新·融合	[高中 微积分 积分法部分] 现有部分的面积
思想沟通	[高中 微积分 数列的极限部分] 在数列的收敛和发散的定義和性质的基础上，尝试进行预测与说明。
信息处理	[高中 微积分 积分法部分] 指导定积分和级数的和之间的关系时，能使用工程工具。
态度·实践	[高中 微积分 数列的极限部分] 使用级数解决各种问题，从而认识级数的有用性和价值。
	[高中 微积分 微分法部分] 通过导函数的各种运用，认识微分的有用性和价值。

[高中 微积分 积分法部分] 通过定积分的各类运用，认识定积分的有用性和价值。

微积分的替代体系中重点提到了解决问题和推理素养，替代体系中难以解决的信息处理以及态度和实践在讲授学习方法以及注意事项中具体提到。

(5) 概率和统计

一般选择科目‘概率和统计’的内容体系中提到的完成标准按各素养整理如下：

<表 15> ‘概率和统计’ 教科各核心素养的完成标准

核心素养	完成标准
解决问题	[12 概统 01-03]
推理	[12 概统 03-07] 能推定总平均并解释该结果。
创新·融合	[12 概统 02-03] 了解概率的加法定理并能灵活运用。
	[12 概统 02-04] 知道对立事件概率的涵义并能灵活运用。
	[12 概统 02-07] 了解概率的乘法定理并能灵活运用。
思想沟通	[12 概统 02-06] 理解事件的独立与从属的涵义并能进行说明。
	[12 概统 03-06] 了解标本平均和总平均的关系并能进行说明。
信息处理	
态度·实践	

另一方面，概率和统计的‘讲授·学习方法及注意事项’中有关培养数学教科素养的内容如下。

<表 16> ‘概率和统计’ 教科的各核心素养的讲授·学习方法及注意事项

核心素养	讲授·学习方法及注意事项
解决问题	
推理	
创新·融合	[高中 概率和统计 概率部分] 独立试行的概率和统计中的二项分布一起引入后运用。
	[高中 概率和统计 统计部分] 利用积分向选修<数学 II>的学生们说明连续概率变数及有关内容。
思想沟通	
信息处理	[高中 概率和统计 概率部分] 理解统计概率和数学概率的关系，为了在运用统计概率时实施足够多的次数，可以利用工程工具。
	[高中 概率和统计 统计部分] 用实际生活资料进行概率分配和统计推测时可以利用工程工具。
	[高中 概率和统计 统计部分] 引入标本概率的分配时可以利用工程工具。
态度·实践	[高中 数学 概率和统计 部分] 通过解决实际生活问题认识在各种情况下数列组合的必要性和有用性。

概率和统计的替代体系中重点提到了解决问题和推理素养，内容体系中难以解决的信息处理以及态度和实践在讲授·学习的方法和注意事项中提到。

(6) 几何

作为前途发展需要的选修科目‘几何’的内容体系中提到的完成标准按照各素养整理如下：

<表 17> ‘几何’ 教科各核心素养的完成标准

核心素养	完成标准
解决问题	
推理	[12 几何 03-01] 可以简单地求证直线与直线、直线和平面、平面和平面的位置关系。
创新·融合	[12 几何 03-02] 理解三垂线定理并能灵活运用。
思想沟通	
信息处理	
态度·实践	

另一方面，几何的‘讲授·学习方法及注意事项’中有关培养数学教科素养的内容如下：

<表 18> ‘几何’ 教科的各核心素养的讲授·学习方法及注意事项

核心素养	讲授·学习方法及注意事项
解决问题	[高中 几何 空间图形和空间坐标 部分] 学会运用空间坐标的概念和性质解决空间图形问题。
推理	[高中 几何 二次曲线 部分] 学会理解切断二次曲线的圆锥后获得的曲线，并由此认识几何对象可以被当做代数运用。
	[高中 几何 平面向量 部分] 知道如何使用向量在坐标平面中简单表示直线和圆的方程式。
	[高中 几何 空间图形和空间坐标 部分] 学会通过观察空间图形的性质，在直观理解后进行求证。
创新·融合	[高中 几何 二次曲线 部分] 求二次曲线的折线时可使用判别式，并用隐函数的微分法向学习<微积分>的学生们进行说明。
	[高中 几何 平面向量 部分] 认识到在表达和探索向量的方法中有使用箭头标示的几何法和坐标的对数方法。
思想沟通	
信息处理	
态度·实践	[高中 几何 二次曲线 部分] 通过提示二次曲线及其折线在实际生活中被使用的多种范例，认识其有用性和价值。
	[高中 几何 平面向量 部分] 运用向量解决各种问题，从而认识其有用性和价值。
	[高中 几何 空间图形和空间坐标 部分] 学会理解我们周边的自然和建筑物、艺术作品等体现的空间图

形的性质，认识数学的审美价值。

作为前途发展需要的选修科目‘几何’的替代体系中只提到了推理和创新·融合素养，而并没有提及其他素养。与此同时，讲授学习方法及注意事项内容体系中对推理、创新·融合以及态度和实践的素养做了详细说明。

(7) 实用数学

作为前途发展需要的选修科目“使用数学”的内容体系中所提到的完成标准按照各素养整理如下：

〈表 19〉‘实用数学’教科各核心素养的完成标准

核心素养	完成标准
解决问题	
推理	
创新·融合	[12 实数 01-05] 能够运用图形的相似性和联合性制作产品。
	[12 实数 02-03] 能够绘制各种各样的立体图形的示意图和展开图。
思想沟通	[12 实数 02-05] 能够使用平面图形和立体图形制作产品。
	[12 实数 03-04] 能够按照目的来搜集、整理、分析和解释资料并制作产品。
信息处理	[12 实数 01-01] 能从各种现象中找出规则并用数式体现出来。
态度·实践	[12 实数 03-02] 搜集实际生活资料，能使用图、表、曲线图等进行整理。

另一方面，实用数学的‘讲授·学习方法及注意事项’中有关培养数学教科素养的内容如下：

〈表 20〉‘实用数学’教科的各核心素养的讲授·学习方法及注意事项

核心素养	讲授·学习方法及注意事项
解决问题	
推理	
创新·融合	[高中 实用数学 资料部分] 学会用各种方法尝试制作产品并说明自己所用的方法。
思想沟通	[高中 实用数学 资料部分] 学会用各种方法尝试制作产品并说明自己所用的方法。
信息处理	[高中 实用数学 规则部分] 相似图形中运用比例和自相似图形等，学会使用工程工具。
	[高中 实用数学 规则部分] 图形组合中使用密铺图形等，学会使用工程工具。

	[高中 实用数学 空间部分] 学会使用工程工具确认因视角不同而看上去不同的样子。
	[高中 实用数学 资料部分] 学会用表格或曲线图表现资料，掌握该资料的整体趋势和分配时使用工程工具。
态度·实践	[高中 实用数学 规则部分] 实际生活中用数学式来处理不快指数、身体质量指数、基尼系数、物价指数、恢复系数等
	[高中 实用数学 规则部分] 学会理解利用图形的相似性和联合性制作产品的过程中数学原理被灵活运用。
	[高中 实用数学 空间部分] 确认同一个立体图形可以从不同的观察角度绘制出各种示意图。
	[高中 实用数学 空间部分] 学会理解利用平面图形和立体图形制作产品的过程中数学原理被灵活运用。
	[高中 实用数学 空间部分] 认识到对空间的理解有助于圆满完成与职业有关的工作以及做出最准确的决策。
	[高中 实用数学 资料部分] 知道在分析各种资料并对结果进行说明时，运用表格或曲线图会更简便。
	[高中 实用数学 资料部分] 制作统计的测算结果时，要摒弃过分复杂的东西，认识到统计的有用性。

与其他学科相比，作为前途发展需要而选修科目‘实用数学’的替代体系中详细提到了创新·融合、思想沟通、态度和实践等素养。同时，讲授学习方法及注意事项内容体系中也详细提到了信息处理、态度和实践等素养，包括创新·融合和思想沟通的复合型状态也出现了。

(8) 经济数学

作为前途发展需要的选修科目“经济数学”的内容体系中所提到的完成标准按照各素养整理如下：

〈表 21〉‘经济数学’教科各核心素养的完成标准

素养	完成标准
解决问题	[12 经数 03-06] 能够运用效用函数解决决策性问题。
推理	[12 经数 03-07] 理解不等式领域的涵义，以此解决经济有关函数的最大、最小问题。
创新·融合	
思想沟通	[12 经数 01-02] 经济指标的增减能用百分数和百分点进行说明。
	[12 经数 03-01] 生产、费用及类似经济现象能用函数表现。
	[12 经数 03-03] 理解效能的含义，能通过函数和曲线图表现效能。
信息处理	[12 经数 04-02] 运用微分绘制曲线图的抽象图。
态度·实践	

另一方面，经济数学的‘讲授·学习方法及注意事项’中有关培养数学教科素养的内容如下：

〈表 22〉‘经济数学’教科的各核心素养的讲授·学习方法及注意事项

核心素养	讲授·学习方法及注意事项
解决问题	
推理	[高中 经济数学 微分与经济部分] $y=x^n$ (n 为实数) 的导函数通过举例类推。
创新·融合	[高中 经济数学 数与生活经济部分] 说明货币价值及汇率的关系，随汇率而浮动的盈亏问题使用货币价值的变化及有关内容进行操作。
	[高中 经济数学 函数与经济部分] 决策性问题，用效用函数来探讨消费者的决策，用生产函数探讨生产者的决策。
思想沟通	
信息处理	[高中 经济数学 属于生活经济部分] 把汇率和税金当做计算简单的问题去操作，必要时使用工程工具。
	[高中 经济数学 数列与金融部分] 能使用工程工具进行与金融商品有关的复杂计算。
态度·实践	

在经济数学的替代体系中，由于其和其他科目相融合的科目特性，所以和其他科目相比，更着重于思想沟通素养。讲授·学习方法及注意事项中的创新·融合素养、信息处理素养也与金融联系起来有所提及。

(9) 数学课题探究

作为前途发展选修科目的数学课题探究的内容体系中所提到的完成标准按各素养整理如下：

〈表 23〉‘数学课题探究’教科各核心素养的完成标准

素养	完成标准
解决问题	
推理	[12 数课 02-01] 学会在与数学有联系的各种现象中选定探究的主题并使探究问题具体化。
	[12 数课 02-02] 学会探讨先期研究，寻找合适的探究方法，确立探究计划。
	[12 数课 02-03] 学会根据探究计划实施探究。

创新·融合	[12 数课 02-05] 学会反思和评价探究课程及结果。
思想沟通	[12 数课 02-04] 学会整理探究结果，做成作品并发表。
信息处理	
态度·实践	[12 实数 03-02] 学会搜集实际生活资料并使用图、表、曲线图等进行整理。

另一方面，数学课题探究‘讲授·学习方法及注意事项’中有关培养数学教科素养的内容如下：

<表 24> ‘数学课题探究’教科的各核心素养的讲授·学习方法及注意事项

核心素养	讲授·学习方法及注意事项
解决问题	
推理	
创新·融合	[高中 数学课题探究 课题探究的理解部分] 通过多种探究类型和范例，理解数学课题探究的意义、方法、步骤等。
思想沟通	[高中 数学课题探究 课题探究的实施及评价部分] 公布结果后，能够对探究过程及计算结果进行反思、自我评价及同伴评价。
信息处理	
态度·实践	[高中 数学课题探究 课题探究的理解部分] 指导学生对正确的研究伦理的重要性有所认知，在探究过程中遵守并体会研究伦理。
	[高中 数学课题探究 课题探究的实施及评价部分] 符合学生的兴趣和关注以及学校实际情况，自觉地选择并修改探究主题，对发现问题有所体验。
	[高中 数学课题探究 课题探究的实施及评价部分] 指导学生如何找到探究主题及有关先期研究，学会整理先期的研究等。
	[高中 数学课题探究 课题探究的实施及评价部分] 根据探究主题以及学生的兴趣和关注，选择文献调查、范例调查、资料搜集等适合的探究方法。
	[高中 数学课题探究 课题探究的实施及评价部分] 为共享探究的过程而进行中途检查，对探究活动进行补充和修改。
	[高中 数学课题探究 课题探究的实施及评价部分] 引导学生在选择探究成果时在数学小论文、STEAM 型成果、海报、报告书、数学杂志、数学童话（漫画）、数学报纸等探究类型中选择与学生的兴趣和关注以及学校的实际情况相符合的。
	[高中 数学课题探究 课题探究的实施及评价部分] 根据探究主题的性质以及学生的需要和要求以个人或团队的形式实施；当团队合作进行课题探究时，要均衡地分配任务，使学生在进行探究活动时能具备责任心。

数学课题探究的替代体系中，由于科目的特性，故详细提到了推理素养。不仅如此，在讲授·学习方法及注意事项中对态度和实践的素养也有详细提及。

4. 讲授·学习及评价的方向中提及的数学教科素养

教育课程文件中对实际课堂的讲授·学习及评价的方向中提到的数学教科素养进行了如下说明。

‘讲授·学习及评价的方向’一项的‘讲授·学习方向’之‘讲授·学习原则’中指出要营造培养数学教科素养的教育环境。

(1) 要营造可培养解决问题、推理、创新融合、思想沟通、信息处理、态度和实践等数学教科素养的教育环境，进行相应的讲授和学习。

此外，‘讲授·学习方法’中，培养各类素养的具体的讲授·学习方法也按照各数学学科的素养并依据各素养的子要素一一列出（参考教育部（2015c））。下面用新增的‘态度和实践素养’进行举例说明。

(四) 培养态度和实践素养的讲授·学习中强调如下事项：

- ① 指导学生将数学与周边生活及社会自然现象联系起来，了解数学的必要性和有用性，认识到数学的作用和价值。*
- ② 引导学生关注数学、对数学产生兴趣，带着好奇心和自信心积极地参与到数学学习中，鼓励学生不断挑战，诱发他们的学习动机和欲望。*
- ③ 引导培养学生养成自己设立目标、自觉学习并测评学习结果的自主学习的习惯和态度。*
- ④ 指导学生通过数学活动进行实践，行为正直、公正、有责任心，怀着挑战的勇气去克服困难，关怀、尊重他人及齐心合力的态度，有理有据地提出意见、合理决策的态度。*

教育部（2015c）

另一方面，‘评价方向’的‘评价原则’中的数学系的评价为了对数学教科素养做出均等的评价，特别提出了以下指导方针。这是为了使数学教科素养培养教育在目标、内容、讲授·学习和评价上保持一贯性。

(三) 数学系的评价中不仅要对数学的概念、原理、法则、技巧，还要对解决问题、推理、创新融合、思想沟通、信息处理、态度和实践等数学教科素养做出均等的评价。

一方面，‘评价方法’中提到了评价数学学习过程及结果的各类评价方法。另一方面，评价培养数学教科素养与否时如何运用各类评价方法具体如下：

(三) 对学生的数学学习过程及结果可以用笔试评价、项目评价、组合评价、观察评价、面试评价、口述评价、自我评价、同伴评价等各类方法从质和量上进行评价。

① 笔试评价：对数学概念、原理、法则的理解及运用能力以及解决问题、推理、创新融合、思想沟通等能力进行评价时可用笔试评价的方法，可使用选择题、应答题、论述题等多种试卷形式。

② 项目评价：对以数学学习为基础，针对特定的主题和课题，搜集相关资料并进行分析、综合、解决的过程的评价可用项目评价的方法，可用于评价解决问题、创新融合、信息处理等能力。

③ 组合评价：一种对一定期间数学的学习及成果的评价，综合判断学生对学习内容的理解以及数学教科素养，可用于学生成长信息的获取。

④ 观察评价、面试评价、口述评价是通过对学生个人及小团队的观察、与学生的对话、学生发言等对学生的理解程度、思考方式、执行过程等进行评价的方法，可用于评价思想沟通、态度和实践能力。

⑤ 自我评价是学生自觉地对自我的理解和执行进行评价，可用于评价解决问题能力、推理过程的反思能力、表达自己想法的能力以及态度和实践能力

⑥ 同伴评价是同学之间相互的评价，共同学习的情况下，可用于评价每一个学生发挥各自作用的程度、对团队活动的贡献大小等。

(四) 根据评价内容或方法, 可对学生使用计算器、电脑、教育软件等工程工具及各类教具。教育部 (2015c)

III. 结束语

《2015 数学系教育课程修订案》指定的数学教科素养包括《2009 教育课程修订案》数学课程中反映的解决问题、推理和思想沟通素养, 同时又增加了创新融合、思想沟通、信息处理、态度和实践素养。《2015 数学系教育课程修订案》还详细罗列了数学教科素养的意义以及在教育课程中的反映案例。同时, 《2015 数学系教育课程修订案》还将未来社会要求的创新融合能力、知识信息化社会要求的信息处理能力以及数学的态度和实践能力纳入了数学学科素养。正如本论文第 II 章提到的按各科目分析的内容体系之完成标准中主要提及的解决问题素养和推理素养, 而信息处理素养、态度和实践素养则在讲授·学习方法及注意事项中有所提及, 避免了遗漏这些上课时常会涉及的素养。此外, 针对一部分符合教科特性的素养进行了详细陈述。综上所述各数学教科素养需要在数学系课程中加以培养, 所以不仅是在教科书中, 而且在学校教育课程的编制和运营的过程中也应加以强调。另外, 还应该向教师提供研修或举例演示(草案), 以使他们在上数学课时知道该如何将各素养与完成标准或是将各素养与讲授·学习方法联系起来授课。

与以往不同的是, 当前的社会发展飞速。随着社会如此的发展, 未来社会要求的数学教科素养也正在发生急速的变化。故此, 不论是政府还是学校教育研究人员都应该持续预测社会的变化方向, 并积极应对这种变化, 研究未来社会所需人才培养所必备的教科素养到底是什么, 并以此为依据, 提出全面的教育蓝图, 并在下一轮教育课程中提出应有的教育方向以及各科目要求的各种素养, 以使学生们更好地迎接未来社会。

参考文献

- 教育科学技术部(2011). 数学和教育课程. 首尔: 教育科学技术部。
- 教育部(2015a). 2015 教育课程修订总论与分论确定和发表. 教育部 2015 年 9 月 23 日报导资料。
- 教育部(2015b). ‘2015 教育课程修订案’ 教科教育课程开发政策研究第 3 次联合工作小组资料集。
- 教育部、韩国教育课程评价院、韩国科学创意财团. 教育部(2015c). 数学系教育课程. 教育部 公告 第 2015-74 号 [分册 8].
- 教育部. 教育部(2015d). 小学·初中学校教育课程总论. 教育部 公告 第 2015-74 号 [分册 1]. 教育部.
- 金镐硕, 崔硕镇, 姜相奎(2011). 学校教育课程加强 ESD 方案的研究. ESD 研究课题 2011-2.
- 朴京美 外 31 人(2015a). 2015 数学系教育课程修订试行方案开发政策研究. 韩国科学创意财团。
- 朴京美 外 40 人(2015b). 2015 数学系教育课程修订案试行的开发研究Ⅱ. 教育部, 韩国科学创意财团.
- 朴善花(2015) 2015 数学系教育课程修订案之数学教科素养的含义. 韩国数学教育学会, 学术发表论文集, 2016 卷, 1 号
- 申东熙, 金正雨, 金来英, 李钟媛, 李贤珠, 李正民(2012). 融合型教师教育项目开发研究. 教科教育研究, 16(1), 371-398.
- 柳英义, 金恩正, 申恩秀, 朴恩慧(2013). 有关可持续发展教育的韩国的教育政策及现国家标准教育课程的分析. 幼儿教育学论集, 17(3), 319-341.
- 李光雨(2014). 教科教育课程开发的方向. ‘2015 文·理科合并教育课程修订案’ 教科教育课程开发政策研究联合工作小组资料集. 教育部、韩国教育课程评价院、韩国科学创意财团、首尔特别市教育。
- 李光雨, 全在喆, 洪元彪, 许京喆, 金文淑(2009). 探索核心素养基础小初学校教育课程设计方案研讨会. 韩国教育评价院 研究资料 ORM 2009-20.
- 李根镐, 郭英顺, 李胜美, 崔京淑(2012). 培养面向未来社会核心素养的国家教育课程的构想. 韩国教育评价院. 研究报告 RRC 2012-4.
- 李根镐, 李光雨, 朴志满, 朴民廷(2013). 围绕核心素养的教育课程结构重组方案研究. 韩国教育课程评价院 研究报告 CRC 2013-17.
- 朴美丽, 文钟恩, 朱美京, 郑秀庸, 朴模拉(2015), 仲洛娇 一年级数学教科书中出现的真实世界背景下的课题分析. -围绕复合型教育的核心素养-. 教科教育学研究, 19(2), 543-570.
- 车润京, 金善娥, 金时正, 文钟恩, 宋润镇, 朴英硕, 朴主镐, 安成镐, 李三亨, 李善京, 李恩燕, 朱美京, 咸昇焕, 黄世英(2014). 复合型教育的理论与实际. 首尔: 学知社。

崔胜贤, 郭英顺, 卢恩熙(2011). 提高学习者的核心素养的讲授学习及教师教育方案研究: 围绕中学国语、数学、科学学科。韩国教育课程评价院。研究报告。RRI 2011-1。

黄善旭, 朴慧淑, 李广燕, 高镐京, 李钟奎, 韩焯熙, 朴文焕, 朴相义, 李相民(2014). 围绕主题的高中数学教科书模型开发。韩国数学教育学会 学术发表论文集, 2014(2).

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: Author.