

数字教科书：从直观到数学抽象

王 嵘 陈晓娣
(人民教育出版社)

摘 要：利用数字教科书的特点，可以使看、读、听、思、做有机地结合为一个整体，搭载从直观到数学抽象的桥梁，帮助学生主动探索数学的基本规律，认识数学的本质。基于“数字化”特点、数学学科特点和学生认知规律，我们认为数字教科书的设计应遵循“过程性”“层次性”和“针对性”三个原则。并且，在具体设计方法上，既要注重视觉、听觉和触觉媒介方式的组合运用，以使“看”“听”“做”三位一体，又要将技术和知识内容以一种自然地方式融合在一起，如以栏目组织内容，从而使数字教科书具有独特的内容组织方式和独特的教科书元素。

关键词：数字教科书，数学，数学抽象

从我国第一代数字教科书问世至今，经过十余年来关于数字教科书的探讨和研究，对数字教科书的内涵与特征、标准化建设和产业开发等有了较为全面的认识，并且数字教科书也从最初纸质教科书的简单“翻版”发展到技术与纸质教科书的“融合”。事实上，无论是纸质教科书还是数字教科书，最终目的都是传递知识、辅助教与学。只不过媒介不同，特点不同。数字教科书的特点就是“数字化”，如富媒体性、关联性、开放性和交互性等，这也是前期研究的重点。但这些特点更多地是一种技术特点，而以技术为中心的设计不足以产生持续的教育作用，因为“教科书”的最终落脚点不是技术，而是使用技术帮助学习。因此，走到今日的数字教科书更需要的是一种基于学科特点和认知规律上的设计。本文尝试以数学学科为例，探讨如何充分发挥数字特点、设计数字教科书，帮助学生更好地理解数学。

一、数学与技术

在数学教学中，技术的使用由来已久，主要使用的工具有科学计算器、图形计算器、计算机等，软件有CAS、几何画板、TI的APPS、Z+Z智能教育平台等；主要使用的功能有函数作图与分析、几何绘图、计算机符号代数、电子表格与数据处理、程序设计、整合的网页浏览等。而技术与教科书的整合，2001年时，人教社中学数学室在《全日制普通高级中学教科书·数学》基础上，通过改编方式，编写了一套体现数学课程与信息技术整合思想的教科书《普通高级中学实验教科书（信息技术整合本）数学》。

为什么从教学到教科书编写，技术和数学整合总是研究和实践的焦点问题？数学是研究空间形式和数量关系的科学，它很大的一个特点就是抽象，需要抽象的思维，即舍去事物的一切物理属性，得到数学的研究对象，包括从数量与数量关系、图形与图形关系中抽象出数学概念及概念之间的关系，从事物的具体背景中抽象出一般规律和结构，并且用数学符号或者数学术语予以表征。但是抽象思维的培养，一方面需要直观素材的支撑，另一方面重在“形成”，即从直观到抽象的过程，并非只是抽象的结果。而技术在这些方面具有独特的优势，它具有的文字、图表、动画等多种表述方式可以从不同角度提供直观素材，而它具有的交互性的实验环境又可以提供“探索”空间，从而能更好地帮助学生理解数学。正如在数学中最受欢迎的软件“几何画板”的首席设计者 Nicholas Jackiw 所说：“要理解你了解的东西，而不仅仅是了解你理解的东西。”(knowing what you see, seeing what you know)

当教科书的承载形态从纸质发展到数字，学生对于教科书的阅读和技术的使用可以以一种更丰富和自然的方式融合在一起。数字教科书既可以充分借鉴前期各种工具和软件的最常用的功能，又可以发挥数字教科书的特点，使得看、读、听、思、做有机地结合为一个整体，

搭载从直观到数学抽象的桥梁,帮助学生主动探索数学的基本规律,认识数学的本质。那么,如何搭载这座桥梁?为此,我们提出一些数字教科书设计的原则和方法。

二、数字教科书设计的原则

(一) 过程性

现代数学的发展表明,数学研究源于现实世界的抽象结构,通过基于抽象结构的符号运算、形式推理、一般结论等,理解和表达现实世界中事物的本质、关系与规律。正是数学抽象使得数学成为高度概括、表达准确、结论一般、有序多级的系统。因此,数学抽象能力的培养是学习数学的关键,也是形成理性思维的重要基础。具体地,在数学学习活动中,数学抽象表现为:形成数学概念和规则,形成数学命题与模型,形成数学方法与思想,形成数学结构与体系。这也说明,数学抽象的关键在于“形成”,即从直观到抽象的过程。在数学中,“过程”的展现是多角度的,代数、几何,历史,应用等。传统的纸质教科书虽然在过程展现方面创造了很多经典,但是由于承载形态的限制,如篇幅、版面呈现等,往往一个概念只能从一个角度展现;而数字教科书在信息容量和呈现方式方面有天然的优势,“大容量”可以容纳数学知识不同角度的过程展现,“多页面”可以单一或依次呈现不同角度的过程。

因此,结合数学学科特点和数字特点,过程性原则是:从知识的不同角度,采用组合式媒介展现知识发生发展的过程。以导数概念为例,它具有多重意义,物理上的、代数上的和几何上的,从不同的方面都可以达到同一个结果。这为教科书展现过程提供了多种角度,如物理角度,导数概念的直观基础是速度,高一物理在“运动快慢的描述——速度”中介绍了“平均速度和瞬时速度”,由此出发,将直观的想法“ Δt 越小,运动的描述就越精确”数学化,即用数学符号和方法刻画“ Δt 非常非常小, $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ 表示的是时刻 t 的速度”,就从物理直观抽象到了数学概念;再如几何角度,导数概念的直观基础是切线,从圆到曲线,从“相交一点”到“贴得最近”到“无限接近”再到“割线逼近”,得到精确化的切线定义,即导数;又如历史角度,导数概念的漫长建构过程反映出一个经典数学概念的成长图景,其中既有从直观到抽象的全过程,也有数学家的灵感、方法和困惑。如此,数字教科书在设计时,通过“链接”完全可以将这些角度分别展示(图1),而且不同的角度,采用不同的媒介组合呈现。如历史角度,可以采用图文和解说以“讲故事”方式呈现,而几何角度则可以采用动画和解说相结合的方式呈现。学生在阅读时,既可以根据自己的兴趣和水平选择单一角度,也可以多角度学习,将数学概念不同方面的意义联系起来。

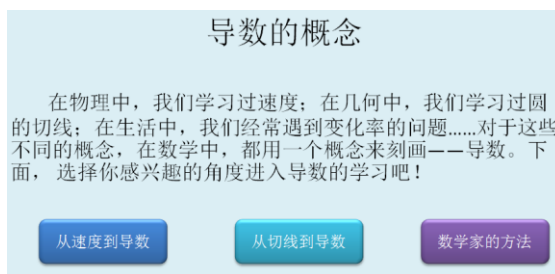


图1 过程性原则：导数概念

(二) 层次性

Allan Collins 曾指出:“第一次教育革命,是从学徒制体系转向学校体系,从农业社会到工业社会的转型加速了这种从学徒制到大众教育的转变。现在,随着我们正在经历一个相似的从工业社会向知识社会的转型,技术极大地影响教育,我们正在经历从学校教育到终身学

习的第二次教育革命。”(文[1], 5) 确实, 当学校教育在教育普及方面作出极大贡献的同时, 由于同一标准的知识要求和评价, 也忽略了很多孩子的兴趣和个性发展。如今, 随着技术与生活的融合, 随着技术的不断革新, 在数字世界中成长起来的孩子们, 要求并且能够进行个性化的学习, 因为技术快速繁殖的一个主要结果是能满足个人偏好。而基于技术的数字教科书应该并且能够在个性化学习方面作出相应的贡献。

因此, 我们提出数字教科书设计的层次性原则: 根据学生水平, 创设不同层次的问题情境、探究问题、表达和交流方式。事实上, 数字教科书设计的每一个原则并非毫无交集, 它们各有侧重点, 但又有彼此相通之处。如前面提到的过程性原则, 虽然主要是基于学科特点提出“不同角度”, 但是这些“不同角度”同时也满足了不同学生的兴趣点和特长点, 如有的学生善于形象思维, 那他可以从几何角度学习; 有的学生善于符号思维, 那他可以从代数角度学习; 等等。而层次性原则完全从学生出发, 充分考虑他们学习数学的差异性, 设置不同层次的学习任务。学习任务层次的差异性包括: 创设不同背景和复杂度的情境, 提出不同深度和广度的问题, 设定多样化的学习结果呈现方式等。比如对于负数乘法的学习, 学生可能会有这样几个水平: ①计算水平——知道法则“负负得正”, 会用法则计算; ②直观原理水平——通过直观方法, 能体会到法则的合理性(为什么负负得正); ③推理论证水平——通过推理, 能证明法则; ④数学构造水平——能体会数学构造的公理化方法。大部分学生可能是水平②, 所以纸质教科书多年来都是采用这种水平介绍法则。但是, 有少数学生可能只能是水平①, 而且很多情况下会计算就足够了; 也有少数学生对追根究底很有兴趣, 希望能了解③, 甚至有极个别的学生能体会④。此时, 数字教科书通过“套娃”模式, 层层解套, 确实可以满足不同水平学生的需求。如在图 2 的设计构想中, 每一个链接就是通往下一个层次的大门, 学生可以根据自己的能力选择行进入到哪一步。

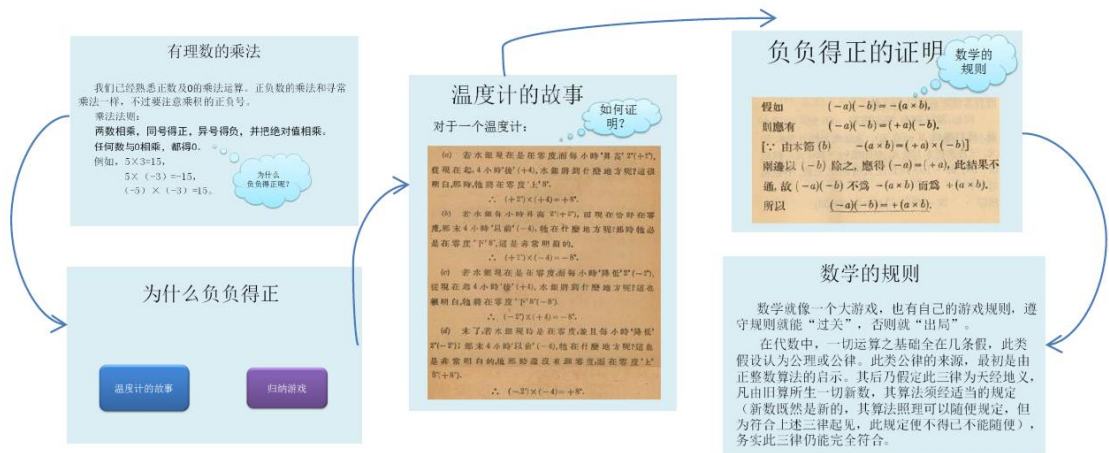


图 2 层次性原则: 负数乘法

(三) 针对性

数字教科书的媒介类型非常丰富, 包括文字、图形、图像、表格、超链接、音频、视频、动画等; 呈现方式也突破了纸质课本二维、静态媒体的局限, 可以实现三维、动态的效果。并可以对媒体进行控制, 如播放过程中的暂停、重播, 对媒体对象的放大/缩小、移动/旋转, 单页、双页或多页显示等。这些体现了数字教科书的富媒体性和阅读性特点。虽然丰富和多样化可以为我们呈现知识提供更多的选择, 但是并非媒介越丰富越有利于知识学习。Mayer 在《多媒体设计的原则》一书中提出七项多媒体设计原则, 其中一项就是: 当无关的词语、画面和声音被排除而不是被包括时, 学生将学得更好。(文[2], 237) 在这种具有多种选择情况下, 恰当运用媒介就显得尤为重要。

如何恰当运用媒介? 媒介类型的特点很重要, 但是对知识类型的考究同样重要。结合这

两者，提出针对性原则：基于知识的类型，有针对性地选择恰当的媒介承载方式。数学知识类型主要有：数学基本事实，数学概念，数学原理，数学技能，数学思想方法。每一种类型的知识各有其特点，相应地也具有独有的学习方式。如基本事实，通常是数学中“约定俗成”的知识，像“两点确定一条直线”等，类似于这种知识，由生活常识即可得，如果还又动画又视频地呈现，那就弃简求繁了；再如数学概念和原理，往往反映了一个体系内共同产生作用的基本要素之间的关系，此时就很有必要利用一种、两种或多种媒介充分展现从直观到抽象的过程了；等等。明确知识类型特点后，选择媒介类型时，有“针对性”是有效媒体呈现的关键。如人教数字教科书《数学九年级上》探究“圆的轴对称性”时，采用的是动画方式，点击“翻折”，界面演示圆演直径翻折后重叠，说明圆是轴对称图形（图3（1）（2））。事实上，这个“探究”是一个操作确认、获得猜想的过程，最佳的方式是学生自己剪个圆纸片，折一折，简单而又明确。但是教科书如果想展现这个过程，从“确认”角度，视频方式比动画方式更有说服力，就用一个学生实际操作“折圆纸片”的视频展示“翻折、重叠”，在视频中“折数次”的结果（图3（3））会让观者体会“任意一条直径都是这个圆的对称轴”，此时再提出一个让观者自己去思考或操作的问题：“这个结论是否对每一个圆都成立呢？”如此，就完成了两个“任意性”的确认：直径的任意性和圆的任意性。

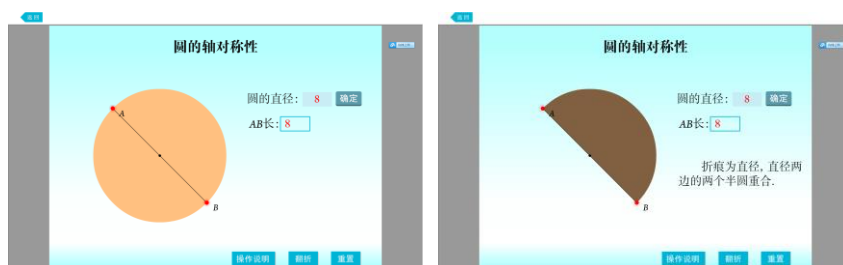


图3 针对性原则：圆的轴对称性

三、数字教科书设计的方法

（一）“看”“听”“做”三位一体

在人教版第二代数字教科书中，提供了视觉方面的图文、听觉方面的音响或语音、触觉方面的手动操纵等使用方式，以满足学习者综合认知的培养和个性化的需求¹。如《数学八年级上册》共提供了137个“看”“听”“做”的单一模式或组合模式，其中，在单一模式中，近一半是动画演示；在组合模式中，又选择了场景实录（图4（1））、动画+解说（图4（2））、微课讲解（图4（3））、动手操作（图4（5））等方式对不同模式进行组合。

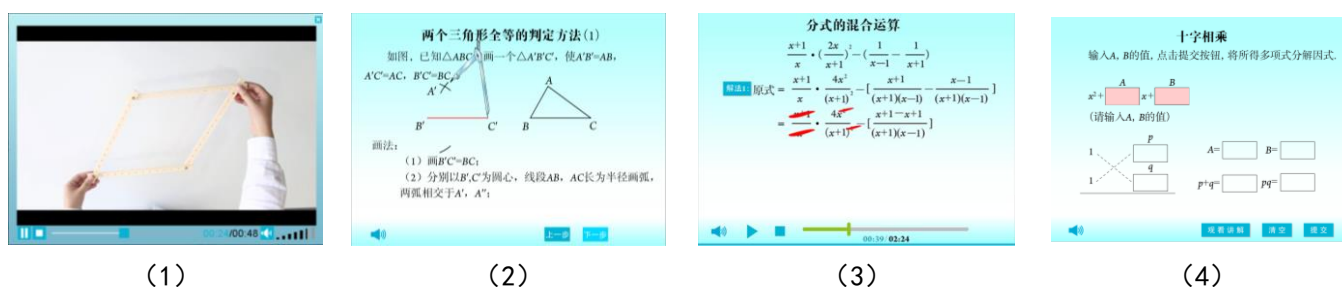
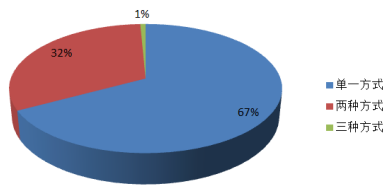


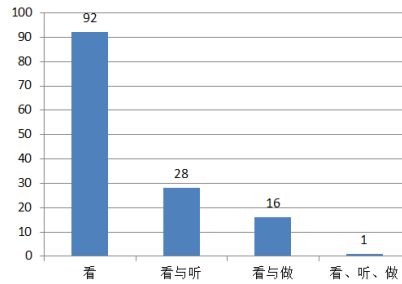
图4

可以看到，无论是在模式还是模式组合设计上，人教版第二代数字教科书都独具匠心。但值得注意得是在这137个模式中，单一模式92个，占到了67%；两两组合模式45个，占到32%；而三种组合模式只有1个（图5）。因此，“看”的模式占据了绝对主体地位，而对“听”和“做”模式的采用不够充分。

¹ 2014 中韩教科书研讨会.数字教科书的现状与未来展望.人民教育出版社, 2014: 3~4.



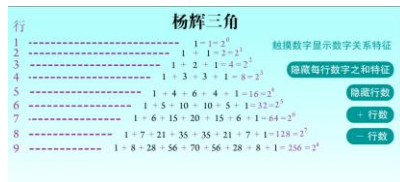
(1)



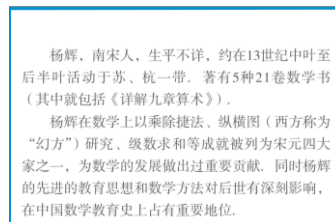
(2)

图 5

对于信息的加工，通常有两条通道：一条是视觉/图像加工，一条是听觉/言语加工。如果词语以解说的形式呈现时，听觉/言语通道就会用来加工词语（即解说）而视觉/图像通道就会用来加工画面（动画），那么两条通道就会得到平衡，哪一条都不会过度负荷，并能提高学习效率。而在看和听时以及呈现结果时，充满着思考和表达，需要通过“做”的方式与看和听产生互动。因此，我们认为：①加重“听”的份量。一般来说，以屏幕文本形式呈现的词语信息可以采用解说的方式呈现。例如在介绍杨辉三角时，无论是对于杨辉三角的结构构造，还是杨辉本人，都采用“看”模式（图 6 (1) (2)），如果将这个知识做成一个“专题短视频”，让学生沉浸在“听故事、看发展”的场景中（图 6 (3)），从杨辉三角的构造到杨辉再到帕斯卡，那么会更生动、更有吸引力。②“看”“听”“做”三位一体。在数学学习中，特别是随着年级的增长，为学生搭建的脚手架应该越来越少，不仅要让他们看一看，听一听，还要让他们多想想、多写写、多做做。在现有的数字教科书中，图 5 (2) 的 28 个“看与听”组合模式中，很多结论是教科书给出的，如图 4 (2) 尺规作图的画法。我们认为在学生看与听之后，应该让学生自己写出画法（结论），而“写”的过程就是一个思维条理化过程，一个抽象的过程。



(1)



(2)

(3)²

图 6

(三) 以“栏目”组织内容

在人教版第二代数字教科书《数学》中，设置了一个“数学实验室”的栏目。数学实验室就是通过数字教科书的技术优势为学生搭建操作、探究和拓展的平台。学生通过菜单选项，对数学对象进行灵活操作、自主探究，以及在动态变化的环境中进行观察、模拟、猜想、归纳和概括等思维活动，从而学习数学思考的方式和方法。如《数学八年级上册》中的“镶嵌实验室”（图 7），在这个实验室中，学生首先可以通过动手操作，看到哪些图形可以覆盖平面（问题 1~5）；然后通过“解读奥秘”知道多边形符合什么条件，就能覆盖平面；最后在“拓展”中将问题一般化。

² BBC 专题片《数学家的故事》第四集“东方的天才们”。

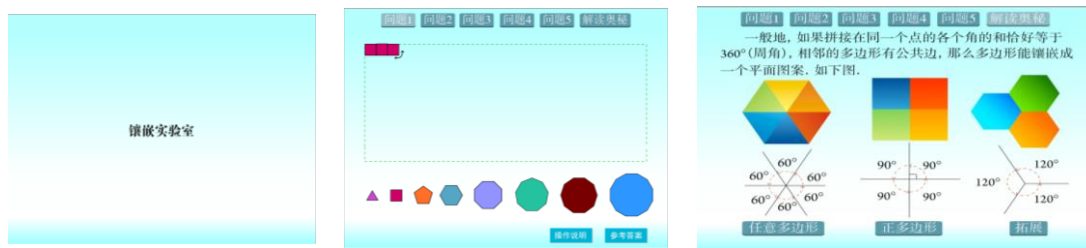


图 7

这是一个质量很高的数学实验，既有操作，又有探究，还有拓展。事实上，在数学实验中，操作是基础，关键是探究，拓展是附加，正符合我们之前所提到的层次性原则，不同的学生可以获得不同的收获。

目前数字教科书多是以纸质教科书为蓝本所做的教学资源丰富化、多媒体化处理，技术与纸质教科书的融合较为机械。今后的数字教科书需要一种技术和知识内容的自然融合，表现在数字教科书应该具有独有的内容组织方式，独有的教科书元素等。借鉴数学实验室的设计，根据技术特点和数学知识特点，我们可以尝试以“栏目”组织内容，如设置“数学故事”“数学推理”“数学联系”等栏目。像纸质教科书，每一章都有配图章引言，而数字教科书可以在每一章开篇采用“数学故事”栏目，以短视频方式讲述与本章主题有关的人物、趣闻、应用等，引发学生深入学习的兴趣，同时这个栏目也可以安排在课文中，讲述一个知识或经典问题的发现、解决、拓展，让学生感受数学文化。再如“数学联系”栏目，可以在数学知识内部与内部、内部与外部的联系点上，建立某一时期所学的相关知识间的联系，从而帮助学生构建知识网络、会学会用。

在这一点上，数字教科书通过它的富媒体性和超链接等特点可以达到纸质教科书所无法实现的效果。以数学中广泛使用的“变式”为例，几何中很多图形的变化基于一个基本图形，如“三角形”和“全等三角形”两章³中有 10 个问题的几何图形是由基本图形①的变化衍生而得（图 8）。这种变化衍生的路径是什么呢？如图 9，基本图形①经过不断地“特殊化”得到变式图形②~⑩，而这种特殊化的方向无非是“角”和“边”，对于角，直角以及直角的位置、等角；对于边：等边。因此，如果数字教科书在每一次图形变式时设置链接，让学生将变式图形和基本图形的学习联系起来，那么学习将不再是一种零散的状态，而是随学随联系，一步步构建知识网络，从点到线再到面。最后，就能建立起图 9 这样的知识网络，让学生体会到万变不离其宗，抓住“宗”，再明白变化过程中特殊化所带来的变化，问题的解决就简单了。

³义务教育教科书数学八年级上册.人民教育出版社，2013.

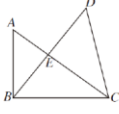









序号	基本图形	图形变式	页码/题号
①			4/练习 1
②			14/例 3
③			17/习题 8
④			17/习题 11
⑤			50/例题
⑥			34/习题 6
⑦			42/例 5
⑧			44/习题 6
⑨			44/习题 8 55/习题 4

图 8 基本图形的变式

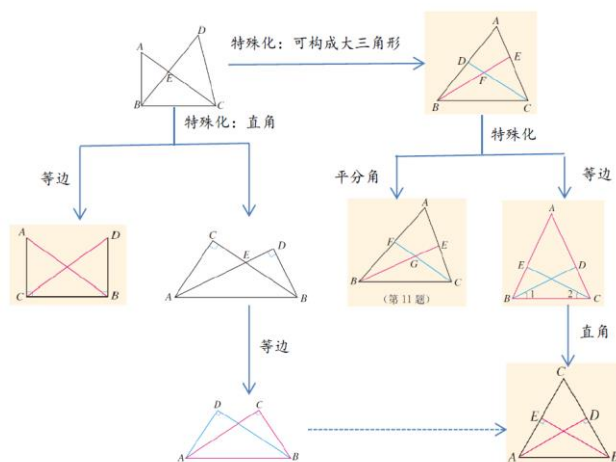


图 9

因此,对于数字教科书的设计,要充分考虑技术特点和知识特点两方面,划分知识类型、设计恰当栏目组织内容、选择合适的媒介承载方式,以使学生在两者自然相融的环境中学习。

参考文献

- [1] [美]柯林斯 (Collins,A.) 等著, 陈家刚等译.技术时代重新思考教育: 数字革命与美国的学校教育.上海: 华东师范大学出版社, 2013。
- [2] 理查德·E·迈耶著, 牛勇等译.多媒体学习.商务印书馆, 2006。
- [3] 吴永和等.电子课本的术语、特性和功能分析.现代教育技术, 2013 (4)。
- [4] 牛瑞雪.我国数字教科书的研究现状、不足与展望, 课程教材教法, 2014 (8)。